DOI: CNKI: 50-1165/N. 20120314. 1927. 013

一类与伪 Smarandache 函数相关的函数方程*

陈　斌

(渭南师范学院 数学系，渭南 714000)

摘要: 首先研究了著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质,讨论了一类新的包含 Smarandache 对偶函数及其伪 Smarandache 函数方程 $Z(n) + S_*(n) - 1 = kn, k \geqslant 1$ 的可解性,利用初等数论及组合方法,结合伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的性质,巧妙地构造了一个新方程。结果给出了这一类方程的所有整数解,即当 $k = 1$ 时,该方程当且仅当有唯一解 $n = 1$,当 $k = 2$ 时,仅有解 $n = 2^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$;当 $k \geqslant 3$ 时,无解。从而,本文彻底解决了这类新方程解的问题。

关键词: Smarandache 函数; 伪 Smarandache 函数; 函数方程; 整数解

中图分类号: O156. 4　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-6693(2012)02-0065-03

1 引言及结论

对于任意正整数 n,著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$。即 $S(n) = \min\{m: m \in \mathbb{N}, n \mid m!\}$,它是美籍罗马尼亚著名的数论专家 Smarandache 教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的,并建议人们去研究它的许多性质。由 $S(n)$ 得定义容易推得,如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示正整数 n 的标准分解式,那么 $S(n) = \max\{S(p_1^{\alpha_1}), S(p_2^{\alpha_2}), \cdots, S(p_k^{\alpha_k})\}$。关于函数 $S(n)$ 的算术性质,许多学者都进行了研究,获得了不少有趣的结果[1-6]。在文献[7]中,Sandor 引入了 Smarandache 函数 $S(n)$ 的对偶函数 $S_*(n)$ 如下,对于任意正整数 n,$S_*(n)$ 的定义为最大的正整数 m 使得 $m! \mid n$。即有 $S_*(n) = \max\{m: m \in \mathbb{N}, m! \mid n\}$。关于 $S_*(n)$ 的算术性质也有学者进行过研究,取得了一系列研究成果。例如在文献[8]中王妤研究了有关 $S_*(n)$ 的函数方程 $\sum_{d \mid n} SL^*(d) = \sum_{d \mid n} S_*(d)$ 的可解性并得到了一个有趣的结论,即若 $A = \left\{n: \sum_{d \mid n} SL^*(d) = \sum_{d \mid n} S_*(d), n \in \mathbb{N}\right\}$,则对于任意的实数 s,Drichlet 级数 $f(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in A}} \frac{1}{n^s}$ 在 $s \leqslant 1$ 时发散,在 $s > 1$ 时收敛,且有恒等式

$$f(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{12^s}\right)$$

其中,$SL^*(n)$ 为 Smarandache LCM 函数的对偶函数且其定义为 $SL^*(n) = \max\{k: [1, 2, \cdots, k] \mid n, k \in \mathbb{N}\}$,$\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta-函数。

在文献[9],Sandor 引入了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义如下:对于任意的正整数 n,$Z(n)$ 为最小的正整数 m,使得 $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$,即 $Z(n) = \min\left\{m: m \in \mathbb{N}, n \mid \frac{m(m+1)}{2}\right\}$。从 $Z(n)$ 的定义可以计算出 $Z(n)$ 的前几个值为: $Z(1) = 1$, $Z(2) = 3$, $Z(3) = 2$, $Z(4) = 7$, $Z(5) = 4$, $Z(6) = 3$, $Z(7) = 6$,

* 收稿日期: 2011-06-15　　修回日期: 2011-10-10　　网络出版时间: 2012-03-14 19:27:00

资助项目: 国家自然科学基金项目(No. 11071194);陕西省教育厅科研计划项目资助(No. 2010JK538);陕西省科技厅自然科学基金项目(No. 2010JM1009);信息安全国家重点实验室(中国科学院软件研究所)(No. 100190)

作者简介: 陈斌,男,讲师,研究方向为数论。

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.65_013.html

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$Z(8)=15$，$Z(9)=8$，$Z(10)=4$，…。关于 $Z(n)$ 的算术性质，许多学者进行了研究，获得了不少有意义的结果[10-17]。同时得到了 $Z(n)$ 一些简单性质：

a) 对于任意正整数 α 及奇素数 p，$Z(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$；

b) 对于任意正整数 α，$Z(2^{\alpha})=2^{\alpha+1}-1$。

本文的主要目的是研究函数方程

$$Z(n)+S_*(n)-1=kn,k\geqslant 1 \tag{1}$$

的可解性，这个问题至少目前还没有人研究，张文鹏教授建议研究这一类方程的整数解的情况，这对进一步研究函数 $S_*(n)$ 与 $Z(n)$ 的性质及它们之间的关系将奠定一定的理论基础，最重要的是可以解决与它相关的级数的敛散性等问题，得到一些较好的特殊结果，从而填补这一研究领域的一点空白。故笔者利用初等及组合的方法获得了这个方程的所有正整数解。亦即证明了下面的定理。

定理1 函数方程(1)当 $k=1$ 时，当且仅当只有唯一的解 $n=1$；当 $k=2$ 时，当且仅当 $n=2^{\alpha},\alpha\geqslant 1$ 满足方程(1)；当 $k\geqslant 3$ 时，方程(1)无解。

2 定理的证明

证明 利用初等及组合的方法可以直接给出定理的证明如下：为了简单起见，不妨设 $S_*(n)=m$。当 $k=1$ 时，显然 $n=1$ 满足(1)式。所以 $n=1$ 是方程(1)的一个解。

下面假定 $n>1$ 且满足方程(1)。由伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的定义知

$$Z(n)(Z(n)-1)+mZ(n)=nZ(n)$$

由此式并结合 $Z(n)$ 的定义立刻可以推出 n 整除 $mZ(n)$，注意到 $m!|n$，所以可以设 $mZ(n)=qn$，或者 $Z(n)=\frac{qn}{m}$。将此式代入(1)式可得 $\frac{qn}{m}+m-1=n$。而由 $S_*(n)=m$ 的定义知 $m!|n$，从而可设 $n=m!\,n_1$，此时，上式可化为

$$q(m-1)!\,n_1+m-1=m!\,n_1 \tag{2}$$

在(2)式中有两项显然可以被 $(m-1)$ 整除，所以由整除的性质易得(2)式中的第三项 $m-1$ 也能被 $(m-1)$ 整除。显然 $(m-1)$ 整除 $m-1$ 当且仅当 $m=1,2,3$。当 $m=1$ 时，由(2)式可知 $q=1$，此时有 $Z(n)=n$，由函数 $Z(n)$ 的定义及性质可得，没有正整数 $n>1$ 满足 $Z(n)=n$。当 $m=2$ 时，由(1)式知 $Z(n)=n-1$ 且 $n>1$，此时，$n=p^{\alpha},\alpha\geqslant 1$，$p$ 为奇素数，但经检验知 $n=p^{\alpha},\alpha\geqslant 1$ 不是(1)式的解。当 $m=3$ 时，即 $S_*(n)=m=3$，则 $n=6$，经验证 $n=6$ 不满足(1)式。所以，当 $k=1$ 时，正整数 n 满足(1)式当且仅当 $n=1$。当 $k=2$ 时，显然 $n=1$ 不满足(1)式。

同理，假定 $n>1$ 且满足方程(1)。根据 $Z(n)$ 的定义知此时有

$$Z(n)(Z(n)-1)+mZ(n)=2nZ(n)$$

立刻可以推出 n 整除 $mZ(n)$，注意到 $m!|n$，可以设 $mZ(n)=q'n$，或者 $Z(n)=\frac{q'n}{m}$。将此式代入(1)式可得 $\frac{q'n}{m}+m-1=2n$。而由 $S_*(n)=m$ 的定义知 $m!|n$，从而可设 $n=m!\,n_2$，此时，上式可化为

$$k(m-1)!\,n_2+m-1=2m!\,n_2 \tag{3}$$

在(3)式中有两项显然可以被 $(m-1)$ 整除，所以由整除的性质易得(3)式中的第三项 $m-1$ 也能被 $(m-1)$ 整除。显然 $(m-1)$ 整除 $m-1$ 当且仅当 $m=1,2,3$。当 $m=1$ 时，由(3)式可知 $k=2$，此时有 $Z(n)=2n$，由函数 $Z(n)$ 的定义及性质可得，没有正整数 $n>1$ 满足 $Z(n)=2n$。当 $m=2$ 时，由(1)式知 $Z(n)=2n-1$ 且 $n>1$，所以，$n=2^{\alpha},\alpha\geqslant 1$，经检验知 $n=2^{\alpha},\alpha\geqslant 1$ 是(1)式的解。当 $m=3$ 时，即 $S_*(n)=m=3$，则 $n=6$，经验证 $n=6$ 不满足(1)式。综上，当 $k=2$ 时，正整数 n 满足(1)式当且仅当 $n=2^{\alpha},\alpha\geqslant 1$。

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 $k \geqslant 3$ 时,由以上两种情况的证明同理可以容易推得,没有正整数 $n > 1$ 满足 $Z(n) = kn$,和 $Z(n) = kn - 1$,且 $n = 6$ 也不满足(1)式。故方程(1)此时无解。

综上所述,便完成了定理的证明。 证毕

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicageo: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 潘承洞,潘承彪. 初等数论 [M]. 北京大学出版社,1992.

[3] 易媛,亢小玉. Smarandache 问题研究 [M]. [S. L.]: High American Press,2006.

[4] 乐茂华. 两个有关伪 Smarandache 函数的方程 [J]. 吉林化工学院学报,2004 ,21(4): 96-104.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质 [J]. 数学学报,2006,49 (5):1009-1012.

[6] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(2):205-208.

[7] Sandor J. On certain generalizations of the Smarandache function [J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics,1999,5(2):41-51.

[8] 王妤. 一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程 [J]. 黑龙江大学自然科学学报,2008,25(5):23-27.

[9] Sandor J. On a dual of the P seudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002,13:18-23.

[10] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社,2007.

[11] Apostol T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[12] Lou Y B. On the Pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007,3(4):48-50.

[13] Zheng Y N. On the Pseudo Smarandache function and its two conjectures [J]. Scientia Magna, 2007,3(4):50-53.

[14] 李梵蓓. 一个与 Smarandache 函数有关的函数方程及其正整数解 [J]. 西北大学学报: 自然科学版,2008,38(6):892-893.

[15] 黄炜,赵教练. 关于 Smarandache 平方根部分数列 $a_2(n)$ 和 $b_2(n)$ [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版,2010,27(6):1-3.

[16] 段辉明,关于丢番图方程 $x^3 + 1 = 57y^2$ [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版,2010,27(3):41-44.

[17] 张福玲,广义 Fibonacci 数列的和公式 [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版,2010,28(5):45-48.

A Function Equation Related to the Pseudo Smarandache Function

CHEN Bin

(College of Mathematics and Information Science, Weinan Normal University, Weinan Shaanxi 714000, China)

Abstract: First of all, this paper studied the properties of the well-known F. Smarandache function $S(n)$, then studied the positive integer solutions of a new function equation $Z(n) + S_*(n) - 1 = kn$, $k \geqslant 1$ involving both of the Pseudo Smarandache function and the dual Smarandache function. Used the elementary number theory and combinational method while the property of the Pseudo Smarandache function $Z(n)$, a new equation was made easily. As a result, all positive integer solutions are given for the equation, that was the equation hold if and only if solution $n = 1$ when $k = 1$, and if $k = 2$, it hold solutions $n = 2^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, it was no solution if $k \geqslant 3$. So, all the positive integer solutions of this new function equation was solved completely.

Key words: the Smarandache function; the Pseudo Smarandache function; function equation; integer solution

(责任编辑 游中胜)

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net